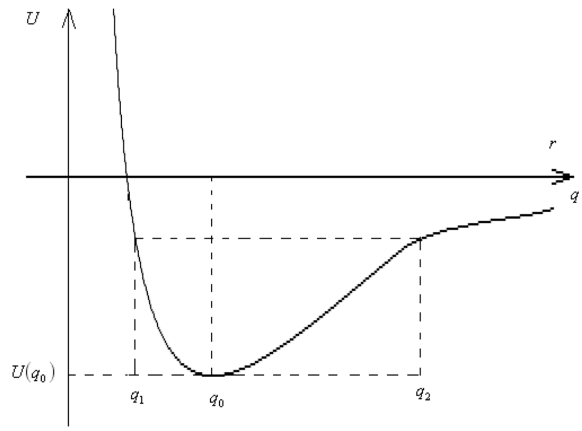
9 ЛЕКЦИЯ

Тербелістер теориясы. Бір өлшемді еркін тербелістер. Еріксіз тербелістер. Резонанс. Өшетін тербелістер. Үйкеліс күшінің әсері бар кездегі еріксіз тербелістер. Ангармониялық тербелістер.

Аз тербелістерге арналған бұл лекция теориялық механиканың іргелі тақырыптарының бірі болып табылады және физика мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Аз тербелістер жүйенің тепе-теңдік күйінің маңында аздаған ауытқулар болғанда және жүйеге әсер ететін күштерді сызықтық деп есептеуге болатын кезде пайда болады. Аз тербелістердің мысалы ретінде маятник тербелістерін, механикалық жүйелердің еркін тербелістерін, электрлік тізбектерді, акустикалық толқындарды және т.б. алуға болады. Бұл лекцияда кіші тербеліс теориясының негізгі ұғымдары мен әдістері, мысалы, табиғи тербелістер жиілігі, өшу коэффициенті, фазалық бұрыш, тербеліс амплитудасы және т.б. қарастырылады Осы ұғымдар мен әдістерді қарастыру жүйенің шағын ауытқулар кезінде қалай тербелетінін және оның динамикасына қандай параметрлер әсер ететінін түсінуге мүмкіндік береді.

Бір өлшемді еркін тербелістер. Механикалық жүйелер табиғатта көбінесе аз тербелістер жасайды. Жүйе өзінің орнықты тепе-теңдік күйінің маңында аз ауытқу жасап тербелсе (периодты түрде қозғалса), оны аз тербелістер жасайды деп айтамыз. Бұдан әрі біз жүйенің еркіндік дәрежесі бірге тең жағдайларды қарастырамыз.

$U(q)$ потенциалдық энергиясының минимум мәнінде жүйе орнықты тепе-теңдік күйде болады және осы күйден ауытқығанда $F=-\dfrac{dU}{dq}$ – жүйені бастапқы қалпына келтіруге ықпал ететін күш пайда болады. Потенциалдық энергияның минимум мәніне сәйкес келетін жүйенің координатын q_0 – деп белгілейік.



Сурет 36.

$$U(q) = U(q_0) + \frac{dU}{dq}$$

$U(q)$ функциясын q_0 нүктесінің маңында Тейлор қатарына жіктеуге болады:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{dU}{dq}\Big|_{q=q_0} \cdot (q - q_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q=q_0} \cdot (q - q_0)^2 + \cdots \quad (1)$$

Санақ басы ретінде $U(q_0) = 0$ нүктесін аламыз, яғни потенциалдық энергияның минимум мәнін осы нүктеге сәйкес аламыз:

$$U_{min} \Rightarrow U'_{min} = 0$$

Егер $q = q_0$ болса $F = 0$ болады, яғни жүйе тепе-теңдікте болады. Ендеше:

$$U(q) = \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q=q_0} \cdot (q - q_0)^2 + \cdots = \frac{1}{2}k(q - q_0)^2 + \cdots = \frac{kx^2}{2} \quad (2)$$

Мұнда $\frac{d^2U}{dq^2}$ – потенциалдық энергияның екінші ретті туындысының q_0 нүктесіндегі мәнін k деп және $q - q_0 = x$ деп белгілеп алдық. Бұл тербелетін бөлшек координатасының тепе-теңдік қалыптан ауытқу мәні болып табылады. Сонымен

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (3)$$

Яғни жүйе аз тербеліс жасаған болса, оның потенциалдық энергиясы (17.3) тең.
Еркіндік дәрежесі бірге тең жүйенің кинетикалық энергиясы, жалпы жағдайда мынаған тең:

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2 \quad (4)$$

Тербеліс аз болғандықтан $a(q) \approx a(q_0) = const = m$ деп белгілеу енгіземіз. Мұндағы m массамен жалпылама координатты x декарт координатасы деп алғанда ғана сәйкес келеді.

$$q = x; \text{ себебі } \quad q - q_0 = x.$$

Сонымен

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{5}$$

Бір өлшемді аз тербеліс жасайтын жүйенің Лагранж функциясы:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \tag{6}$$

Осы функцияға сәйкес қозғалыс теңдеуін қолданып

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{7}$$

Бұл теңдеудің шешімін мына түрде іздейміз

$$x = ce^{\lambda t} \tag{8}$$

$e^{i\omega t} = cos\,\omega t + i\,sin\,\omega t$ – Эйлер формуласын қолданып, тұрақтыларды қайта белгілесек:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) \tag{9}$$

Мұндағы $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ – тербеліс амплитудасы және $-\frac{c_2}{c_1} = tg\alpha$ – тербеліс фазасының тангенсі болып табылады. Ал ω – тербелістің циклдік жиілігі.

Сонымен жүйе орнықты тепе-теңдік күйінің маңында гармониялық тербеліс жасайды. Оның толық энергиясы:

$$E = T + U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \tag{10}$$

Ол тербелмелі процестердің негізгі қасиеттерін түсінуге және алған білімдерін практикалық тапсырмаларда қолдануға мүмкіндік береді.

Еріксіз тербелістер. Жүйеге сырттан айнымалы күш әсер еркенде ол *мәжбүр тербеліс* жасайды. Тербелісті аз деп қарастырғандықтан, осы жүйеге әсер етеін күшті де әлсіз деп алуға болады. Себебі бұл күштің әсері жоғары болса x – ауытқуы үлкен болып кетер еді де, тербеліс аз тербеліс бола алмайтын еді. Осы жағдайда жүйенің меншікті $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ – потенциалдық энергиясынан басқа қосымша сырттан әсер ететін өрістің $U_c(x,t)$ энергиясы да бар болады. x – координатасына байланысты өзгерісі аз болғандықтан мұны да жіктейміз:

$$U_c(x,t) = U_c(0,t) + \frac{dU(x,t)}{dx}\Big|_{x=0} \cdot x + \cdots = U_c(0,t) - F(t)\cdot x \tag{11}$$

$$\frac{dU(x,t)}{dx}\Big|_{x=0} \cdot = -F(t) \tag{12}$$

$U_c(0,t)$ тек уақыттың функциясы болғандықтан, оны уақыттың толық туындысы ретінде Лагранж функциясынан алып тастаймыз

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + x \cdot F(t) + \cdots \tag{13}$$

Қозғалыс теңдеуі

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}. \tag{14}$$

Бұл тұрақты коэффициенттері бар біртекті емес сызықты дифференциалды теңдеу. Осы қарастырып отырған мәжбүр тербелістің қозғалыс теңдеуінің шешімі мынадай қосындыны береді: $x = x_0 + x_\partial$.
Мұндағы: x_0 – біртекті теңдеудің жалпы шешімі болса, x_∂ – біртекті емес теңдеудің дара (дербес) интегралы болып табылады.

$$x_0 = A\,cos(\omega t + \alpha) \tag{15}$$

$A = A(t)$ толық шешімін табу керек. Ол үшін тұрақтыларды вариациялау әдісін қолданамыз. Яғни тұрақтыларды уақыттың функциясы ретінде аламыз:

$$y = A(t)e^{i\omega t}$$

$$\dot{y} = A(t)i\omega e^{i\omega t} + \dot{A}(t)e^{i\omega t} \tag{16}$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta) \tag{17}$$

Сонымен сырттан периодты күш әсер еткенде жүйе жүйенің меншікті ω жиілігі және мәжбүрлеуші күштің жиілігі γ болатын екі тербелістің қосындысынан тұратын қозғалысқа келеді.

Резонанс. Ал бірақ $\omega = \gamma$ болғанда, яғни резонанс кезінде бұл (18.18) теңдеуді қолдана алмаймыз. (16) теңдеуді қайтадан жазамыз:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}cos(\omega t + \beta)$$

Дара шешімін былай іздейміз:

$$x_\partial = Bt\,sin(\omega t + \beta) \tag{18}$$

Бірінші ретті және екінші ретті туындыларын алып, оларды (16) қойғанда:

$$B = \frac{F_0}{2m\omega} \tag{20}$$

Сонымен энергияға арналған өрнекті қайтадан жазатын болсақ:

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2 \tag{21}$$

Егер сыртқы күш жүйеге өте аз уақыт аралығында әсер етті деп есептесек, $e^{-i\omega t} \approx 1$, сонда:

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt\right)^2. \tag{22}$$

Қорытындылай келе, жүйеде оның потенциалдық энергиясын өзгертетін сыртқы күштің әсерінен мәжбүрлі тербелістер пайда болады. Сыртқы күштің жиілігіне байланысты тербелмелі жүйе тербеліс амплитудасы максималды мәнге дейін өсетін резонанс күйіне өтуі мүмкін. Мәжбүрлі тербелістерді сипаттау үшін амплитудалық-фазалық сипаттама және резонанс қисығы қолданылады. Еріксіз тербеліс табиғатта және техникада, мысалы, радиоэлектроникада, оптикада, акустикада, медицинада және басқа салаларда кеңінен қолданылады.

Өшетін тербелістер.

Әдетте, бұл тербеліс жиілігі тербелістегі дененің меншікті жиілігінен аз болады. Осы жағдай орындалғанда тербелістегі денеге тек жылдамдыққа тәуелді үйкеліс күші әсер етеді:

$$f_{үйк} = -\alpha \quad \dot{x} \tag{23}$$

Негізінде α – оң таңбалы, «–» таңбасы күштің жылдамдыққа қарсы бағытталғанын көрсетеді. Сонымен қозғалыс теңдеуі:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \tag{24}$$

Белгілеулер енгіземіз

$$\begin{cases} \dfrac{k}{m} = \omega_0^2; \\ \dfrac{\alpha}{m} = 2\lambda. \end{cases} \tag{25}$$

белгілеулерін енгіземіз.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda\dot{x} = 0 \tag{26}$$

ω_0 – үйкеліс жоқ кездегі жүйенің еркін тербелісінің жиілігі, λ – *өшу коэффициенті* деп аталады.

Тұрақты коэффициенттері бар сызықты теңдеулерді шешудің жалпы ережесін пайдаланып

$$x = e^{rt} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \tag{28}$$

шешімінің түрі $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ – қатынасына байланысты.

1) $\lambda<\omega_0$ – түбірден теріс сан шығып, мәні комплексті болады.

2) $\lambda>\omega_0$ – оң болады.

3) $\lambda=\omega_0 \Rightarrow e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ гармониялық функция болады да, функция тербелісті сипаттайды.

4)

$$x = \alpha e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) \tag{29}$$

Осындай түрдегі тербелісті *өшетін тербеліс* деп аталады.

2)Енді $\lambda>\omega_0$ тербелісті былай анықтайды:

$$x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} = c_1e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t} + c_2e^{-\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t} =$$

$$= c_1e^{-\alpha_1t} + c_2e^{-\alpha_2t} \tag{30}$$

α_1, α_2 – оң сандар.

Яғни екеуі де экспоненциалды кемитін функциялар. Яғни периодты емес түрде өшеді. Бұл апериодты өшетін қозғалыстың бір түрі.

1) c_1, c_2 - оң сан; 2) c_1 – оң сан болса, c_2 – теріс; 3) $\lambda = \omega_0$ жағдайында $r = -\lambda$ шешімді былай іздейміз:

$$x = (c_1 + c_2)e^{-\lambda t} \tag{31}$$

Бұл да өшетін апериодты тербелістің маңызды жағдайы болады. Бұл жағдайда да қозғалыс тербелістік сипатта болмайды.

Үйкеліс күшінің әсері бар кездегі еріксіз тербелістер.

Үйкелістің әсері жүйенің еріксіз тербелістеріне қалай әсер ететіні туралы айтатын боламыз. Еріксіз тербелістер – жүйеге сыртқы күштердің әсерінен пайда болатын тербеліс екенін естеріңізге тағы да сала кеткен жөн. Яғни, қозғаушы күш жүйеге әсер еткенде, ол белгілі бір амплитуда мен жиілікте тербелмелі қозғалыс жасайды.

Бірақ жүйеде үйкеліс болған кезде жүйенің энергиясы бірте-бірте жоғалады және тербеліс амплитудасы уақыт өткен сайын азаяды. Үйкеліс тербелістердің өшуіне немесе жүйенің бірқалыпты қозғалыс жағдайына өтуіне әкелуі мүмкін. Бұл тақырыпта біз еріксіз тербелістерді талдау кезінде үйкелістің болуын қалай ескеру керектігін және оның болуы тербелмелі жүйенің параметрлеріне қалай әсер ететінін қарастырамыз.

Үйкеліс бар кездегі мәжбүр тербелістердің қозғалыс теңдеуін жазу үшін:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \tag{32}$$

теңдеуіне сыртқы күш $f_0 \cos\gamma t$ -ны қосып жазамыз.

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} cos\,\gamma\, t \tag{33}$$

Сонымен, теңдеудің дербес шешімі:

$$x_g = \beta_1\, cos\,\gamma\, t + \beta_2\, sin\,\gamma\, t = b\, cos(\gamma t + \beta) \tag{34}$$

ендеше:

$$b = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} = \frac{f_0}{m}\sqrt{\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda^{2\gamma^2}}}\,, \tag{35}$$

$$tg\beta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}\,. \tag{36}$$

Толық шешім

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + b\, cos(\gamma t + \beta) \tag{37}$$

Яғни біршама уақыт өткен соң алдыңғы екі мүше шексіз азға айналады. Яғни біртекті мүшелері нөлге айналады. $\gamma = \omega_0^2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ орнына қоямыз:

$$b = \frac{f_0}{m}\sqrt{\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} = \frac{f_0}{m}\frac{1}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\,; \tag{38}$$

Яғни, үйкеліс жағдайында да бұл резонанс та шексіздікке айналмайды.

Ангармониялық тербелістер. Жүйені бастапқы орнықты қалпына келтіруге әсер ететін күшті алдыңғы тақырыптарда қатарға жіктеген болатынбыз:

$$f = -kx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \cdots \tag{39}$$

Осындағы бірінші мүше серпімді күш болып, осы күштің әсерінен жүйе гармониялық тербеліс жасайды деп айтқан болатынбыз. Енді осы қатардағы екінші мүшені ескеріп, қозғалыс теңдеуін жазсақ, былай болады:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha x^2. \tag{40}$$

Осы бейсызық теңдеу *ангармониялық вибратордың* теңдеуі болып табылады. Осы теңдеуді шешу үшін аз параметрлері бойынша жіктеу тәсілін қолданамыз. Аз параметр ретінде бастапқы ауытқу немесе бастапқы жылдамдықтың мәнін алады.

Аз параметрдің мәнінің екінші дәрежесіне дейінгі дәлдікпен алғанда:

$$x = x_1 + x_2, \tag{41}$$

мұндағы x_1 – аз параметрдің бірінші реті, x_2 – екінші ретті мүшелері. Амплитуда мәні a-ны жіктеу жүргізуге арналған аз параметр ретінде алуға болады.

$$\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \alpha a^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Осы теңдеудің шешімін былай іздейміз:

$$x_2 = c_1 + c_2 \cos 2\omega_0 t, \tag{42}$$

және дербес шешімі:

$$x_2 = \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} - \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t. \tag{43}$$

(41) теңдеудің шешімі:

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{ä}$$

$$x = a\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\alpha a}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t + \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}\left[1 - \frac{1}{3}\cos 2\omega_0 t\right] \tag{44}$$

Сонымен осы теңдеудің шешімінен көріп тұрғанымыздай, гармониялық тербелістің жиілігі 2-есеге артты, бастапқы тыныштық қалпынан $\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}$ шамаға ауытқу пайда болды. Бұл жүйеде тербеліс түрінің өзгеруіне әкелетін ангармониялық мүшелердің болуын көрсетеді.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Орнықты тепе-теңдік күй дегеніміз не?
2. Мәжбүрлі тербеліс дегеніміз не?
3. Қандай сыртқы күштер еріксіз тербелістерді тудыруы мүмкін?
4. Резонанстық тербелістердің қасиеттері қандай?
5. Еріксіз тербеліс процесінде сыртқы күштен жүйеге энергияның берілуі қалай жүреді?
6. Өшетін тербеліс дегеніміз не?
7. Өшу коэффициенті мен тербеліс периоды қалай байланысты?
8. Қандай күштер тербелістердің өшуіне әкелуі мүмкін?
9. Критикалық өшу коэффициентті қалай есептеуге болады?
10. Үйкеліс жүйенің еріксіз тербелістеріне қалай әсер етеді?
11. Үйкеліс күшінің әсерінен тербелмелі жүйенің қандай параметрлері өзгеруі мүмкін?
12. Бірқалыпты қозғалыс дегеніміз не және оның үйкелістің болуымен қандай байланысы бар?
13. Анармониялық тербелістердің гармониялық тербелістерден айырмашылығы неде?
14. Жүйедегі ангармониялық тербелістер неден туындайды?
15. Аз параметрді қолдану қаншалықты тиімді?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5